Étude de la série Harmonique

Théorème 1 : En notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique on a le développement asymptotique suivant :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où γ est un réel strictement positif.

Théorème 2 : On pose $k_n ;= \min\{k \in \mathbb{N} : H_k \geq n\}$. On a alors

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} e.$$

Preuve théorème 1 :

Ordre 1 : On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ pour tout entier n non nul.

On a alors $u_n - v_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ (un calcul de dérivée permet de le voir). On peut aussi voir que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

par le même argument que précédemment.

On vient de montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers un réel γ. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on a $0 < 1 - \ln(2) = v_2 \leq \gamma$ donc γ est positif et $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Ordre 2 : Soit $t_n = u_n - \gamma$.

On a

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

donc la série $\sum t_k - t_{k-1}$ converge par le théorème de sommation des équivalents et on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k - t_{k-1} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2} \sim \frac{-1}{2n}.$$

Le deuxième équivalent vient d'une comparaison série-intégrale car

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

donc $\left[\frac{-1}{t}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \left[\frac{-1}{t}\right]_{n-1}^{+\infty} = \frac{1}{n-1}$ et le résultat découle du théorème d'encadrement en divisant par

Comme $\sum_{k=n}^{+\infty} t_k - t_{k-1} = \lim_{m \to +\infty} t_m - t_{n-1} = -t_{n-1}$, on a $t_{n-1} \sim \frac{1}{2n}$ donc $t_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où le résultat. $\square$

Preuve du théorème 2 :

Par le théorème 1 on sait qu'il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon(n)$. Par définition de k_n on a

$$\begin{cases} \ln(k_n) + \gamma + \varepsilon(k_n) \geq n \\ \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon(k_n - 1) < n \end{cases}$$

d'où

$$e^{-\gamma + \varepsilon(k_n) + n} \leq k_n < e^{-\gamma + \varepsilon(k_n - 1) + n} + 1$$

et donc $k_n \sim e^{\gamma + n}$. On conclut alors car

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} \sim e^{\frac{n+1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\to} e. \ \square$$

Remarques importantes :

- Rien de spécialement dur mais il faut être au clair sur les théorèmes d'équivalence